

EN KÜÇÜK KARELER METODU

Tek değişken veya tek ölçmenin olduğu sistemler için;

Bir deneysel ölçme sonucunda elimizde (deneysel sonuçlarımız), x_1, x_2, \dots, x_n şeklinde n adet veri olsun. Bu deney verilerine göre, ortalama x_m değerlerinden olan sapmaların kareleri toplamı;

Sapma $\leftarrow S = \sum_{i=1}^n (\underline{x_i} - \underline{x_m})^2 = 0$ (1)

S' yi, toplam değerini minimum yapacak şekilde x_m ortalama değeri bulunmak istenirse; (x_m 'e göre kısmi türevini alınır ve sıfıra eşitlenirse)

$$\underline{\underline{\frac{\partial S}{\partial x_m}}} = 0 = \sum_{i=1}^n -2(x_i - x_m) = -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i - nx_m \right)$$

burada n sayısı gözlem(deney sayısı) sayıdır. 1. denklemden ifadesinden şunu buluruz

$$\underline{x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

Elde edilir. Sonuç olarak tek ölçmenin olduğu sistemlerde, bir ortalama değerden olan sapmaların karelerini minimum yapan değer (diğer bir deyişle en küçük kareler yöntemi) aritmetik ortalama değerini vermektedir.

İki değişkenli sistemler için;

X ve y gibi iki değişkenin belirli bir aralıkta ölçüldüğünü ve y ifadesinin x değişkenine göre analitik ifadesini bulmak istersek; bunun en kolay yolu x ve y değişkenlerini bir grafik kağıdına işaretleyerek aralarından en uygun bir eğri çizmektir. Oldukça yaklaşık olan bu yöntem yerine en küçük kareler yöntemini kullanarak daha güvenilir bir bağıntı elde etmek mümkündür. Bu denklem;

$$\underline{y = ax + b}$$

Şeklinde doğrusal (lineer) bir ifade olarak kabul edilsin. Burada amaç bu bağıntıdaki y değeri ile ölçülen her hangi bir noktadaki y değeri arasındaki farkı azaltmaktır. En küçük kareler yöntemine göre yazılan;

$$S = \sum_{i=1}^n [\underline{y_i} - \underline{(ax_i + b)}]^2$$

İfadenin, ayrı ayrı a ve b katsayılarına göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$$\begin{aligned} nb + a \sum x_i &= \sum y_i \\ b \sum x_i + a \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

Denklemleri yazılabilir. İki bilinmeyenli bu iki denklemin çözümü ise;

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Sonuçlarını verir. Herhangi bir i noktasında hesaplanmış y_i değer \hat{y} , ise;

$$\hat{y} = ax + b$$

$$\begin{aligned}\text{Standart Hata} &= \left[\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2} \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{\sum (y_i - ax_i - b)^2}{n - 2} \right]^{1/2}\end{aligned}$$

İki değişkenli sistemler için;

$$y = ax^2 + bx + c$$

İki değişkenli sistemlerde yüksek dereceden polinomlar içinde en küçük kareler yöntemi uygulanabilir. Burada çizilen veya tahmin edilen eğriye en uygun dereceden polinom veya matematiksel yaklaşım yapılır.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Denklem S eşitliğinde yerine yazılarak her bir katsayı için kısmi türev alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = \sum 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-x_i^2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 = \sum 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)](-1)$$

Elde edilen 3 denklemden 3 bilinmeyenli denklem sistemi çözülür.

$$\begin{aligned}a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 &= \sum x_i^2 y_i \\a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i &= \sum x_i y_i \\a \sum x_i^2 + b \sum x_i + cn &= \sum y_i\end{aligned}$$

3 bilinmeyenli denklem sisteminden a, b ve c katsayıları bulunarak yaklaşım denkleminin katsayıları elde edilir. Elde edilen denklem sayesinde yapılmamış değerler için denklem yardımıyla deneysel sonuçlar yaklaşık bulunabilir.

$$y = ax^2 + bx + c$$

En Küçük Kareler -Uygulama

y_i	x_i
1.2	1.0
2.0	1.6
2.4	3.4
3.5	4.0
3.5	5.2
$\sum y_i = 12.6$	$\sum x_i = 15.2$

$$y = ax + b$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_m} = 0 = \sum_{i=1}^n -2(x_i - x_m) = -2\left(\sum_{i=1}^n x_i - nx_m\right)$$

$$nb + a \sum x_i = \sum y_i$$

$$b \sum x_i + a \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$x_i y_i$$

$$1.2$$

$$3.2$$

$$8.16$$

$$14.0$$

$$18.2$$

$$\sum x_i y_i = 44.76$$

$$x_i^2$$

$$1.0$$

$$2.56$$

$$11.56$$

$$16.0$$

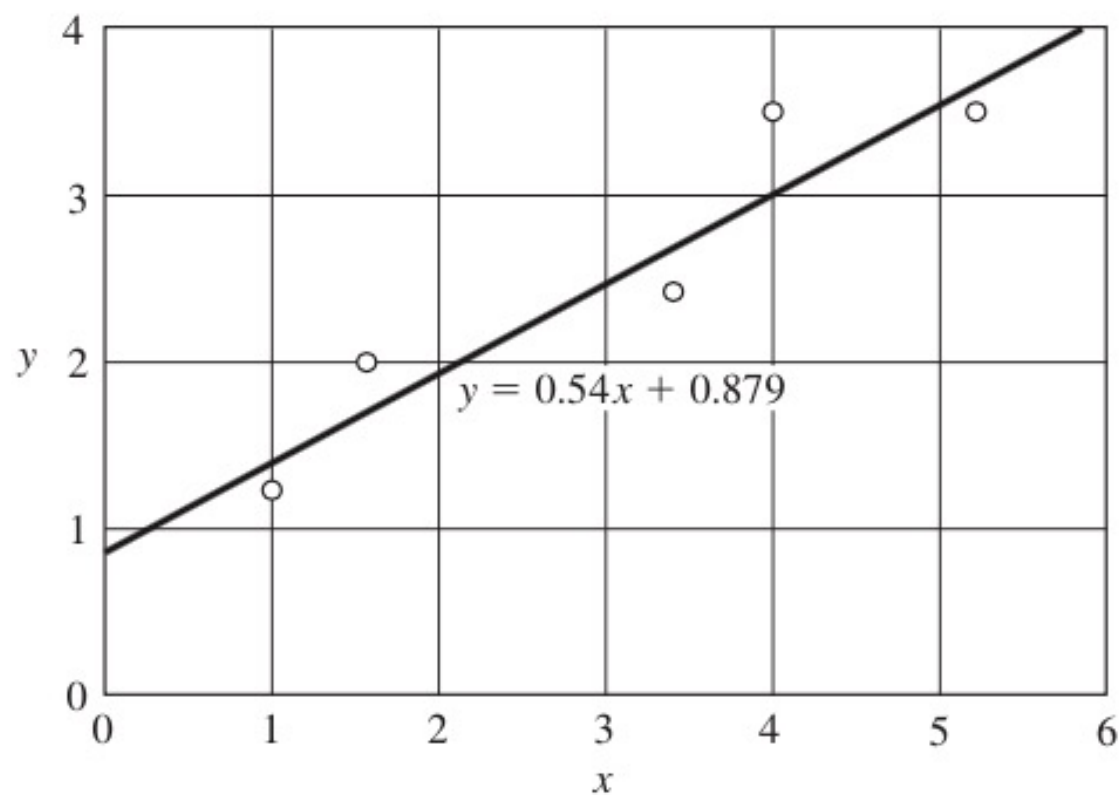
$$27.04$$

$$\sum x_i^2 = 58.16$$

$$a = \frac{(5)(44.76) - (15.2)(12.6)}{(5)(58.16) - (15.2)^2} = 0.540$$

$$b = \frac{(12.6)(58.16) - (44.76)(15.2)}{(5)(58.16) - (15.2)^2} = 0.879$$

$$y = 0.540x + 0.879$$



KORELASYON SAYISI

$$r = \left[1 - \frac{\sigma_{y,x}^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/2}$$

$$r^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{y,x}^2}{\sigma_y^2}$$

$$\sigma_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}{n - 1} \right]^{1/2}$$

$$\sigma_{y,x} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{ic})^2}{n - 2} \right]^{1/2}$$

$$y_m = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{12.6}{5} = 2.52$$

$$y_{ic} = 0.5490x + 0.879$$

i	y_i	y_{ic}	$(y_i - y_{ic})^2$
1	1.2	1.419	0.048
2	2.0	1.743	0.066
3	2.4	2.715	0.0992
4	3.5	3.039	0.212
5	3.5	3.687	0.035
			$\sum = 0.4607$

$$\sigma_{y,x} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{ic})^2}{n - 2} \right]^{1/2}$$

$$\sigma_{y,x} = \left(\frac{0.4607}{3} \right)^{1/2} = 0.3919$$

$$\sigma_y = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2}{n - 1} \right]^{1/2}$$

$$y_m = (\Sigma y_i)/5 = 2.52$$

$$\sigma_y = [\Sigma (y_i - y_m)^2 / (5 - 1)]^{1/2} = 0.987$$

$$r = \left[1 - \left(\frac{0.3919}{0.987} \right)^2 \right]^{1/2} = 0.9178$$

EN KÜÇÜK KARELER METODU

BÖLÜM -2

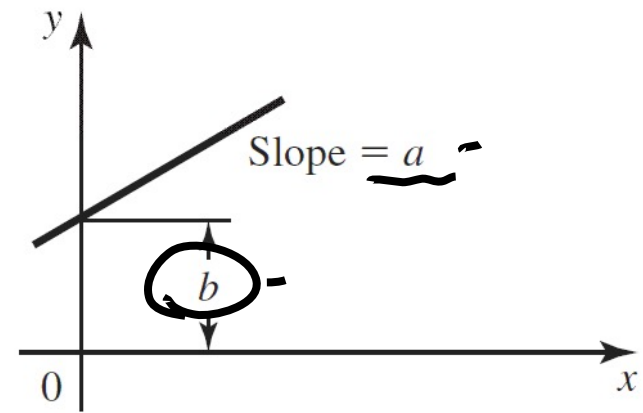
**Functional
Relationship**

Method of Plot

**Graphical Determination
of Parameters**

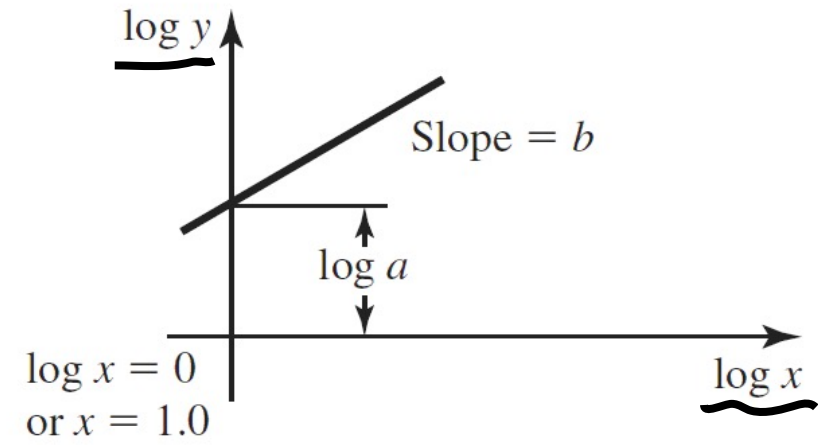
$y = ax + b$

y vs. x on linear paper



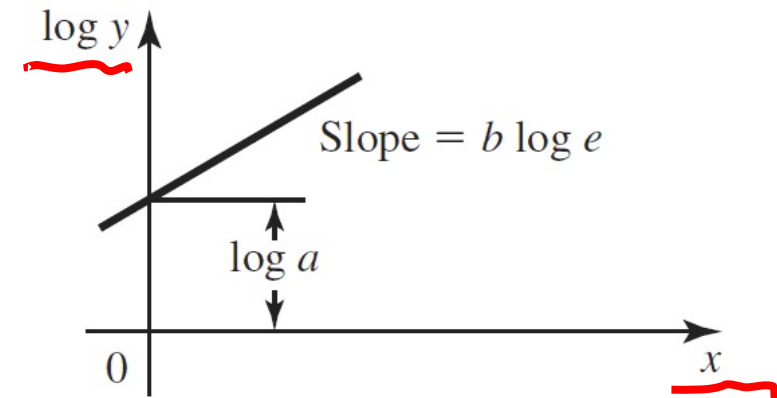
$$\underline{y = ax^b}$$

log y vs. log x on loglog paper



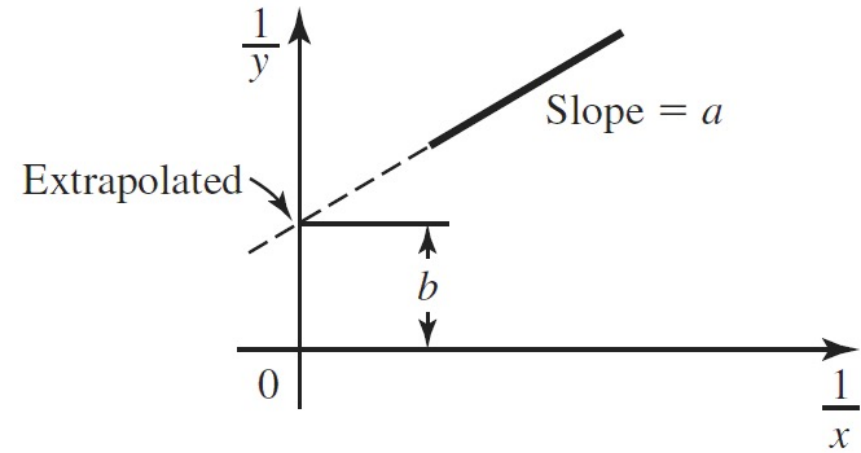
$$\underline{y = ae^{bx}}$$

log y vs. x on semilog paper



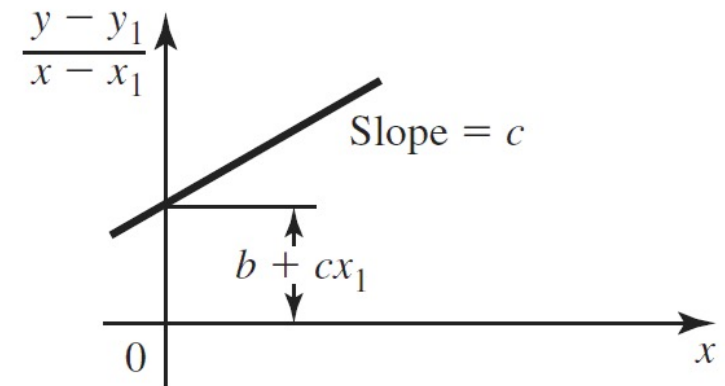
$$y = \frac{x}{a + bx}$$

$\frac{1}{y}$ vs. $\frac{1}{x}$ on linear paper



$$y = a + bx + cx^2$$

$\frac{y - y_1}{x - x_1}$ vs. x on linear paper



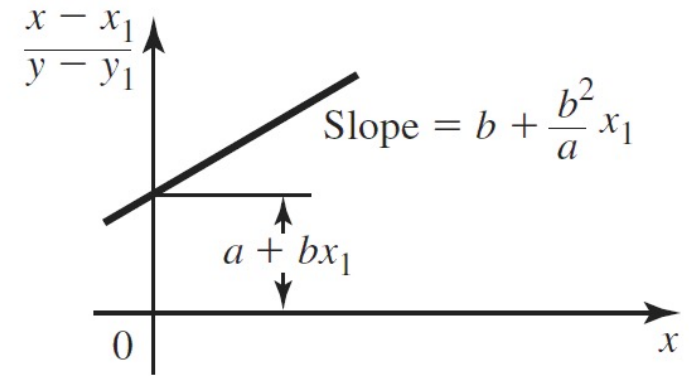
**Functional
Relationship**

Method of Plot

**Graphical Determination
of Parameters**

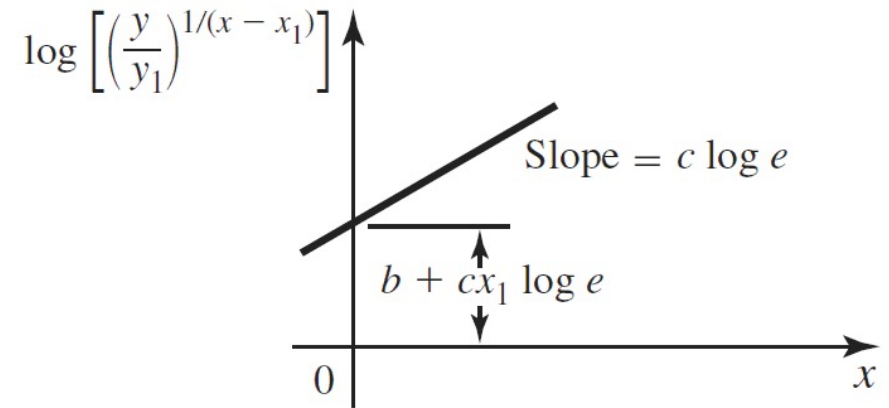
$$y = \frac{x}{a + bx} + c$$

$\frac{x - x_1}{y - y_1}$ vs. x on linear paper



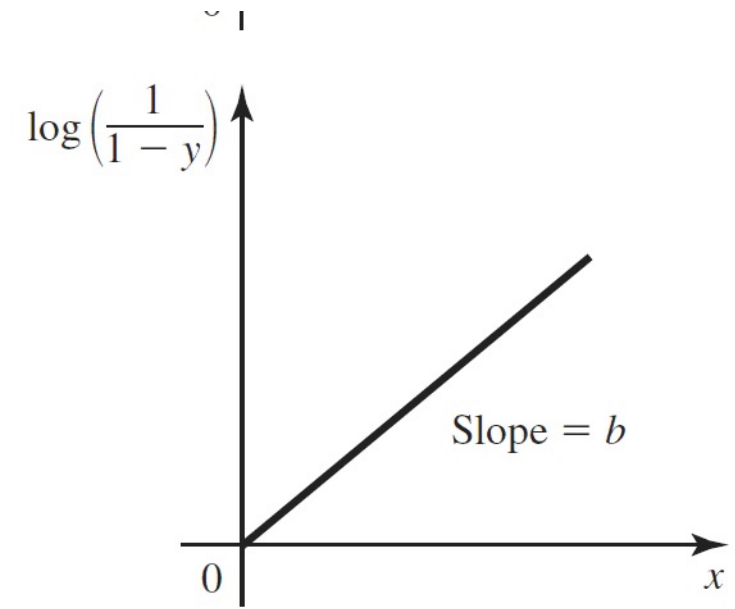
$$y = ae^{bx+cx^2}$$

$\log \left[\left(\frac{y}{y_1} \right)^{1/(x-x_1)} \right]$ vs. x
on semilog paper



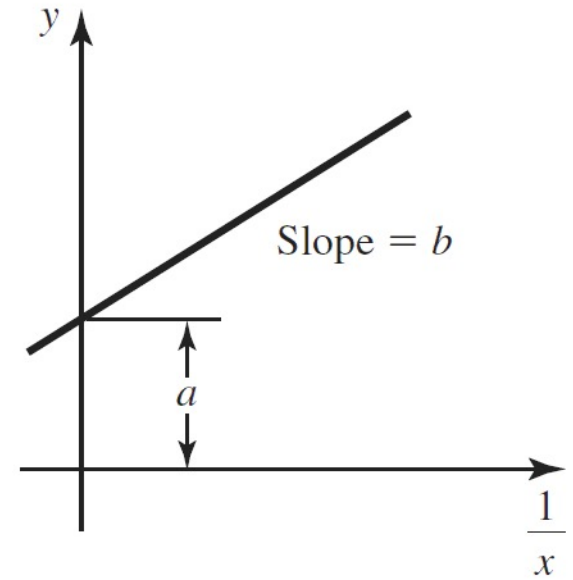
$$y = 1 - e^{-bx}$$

$\log\left(\frac{1}{1-y}\right)$ vs. x
on semilog paper



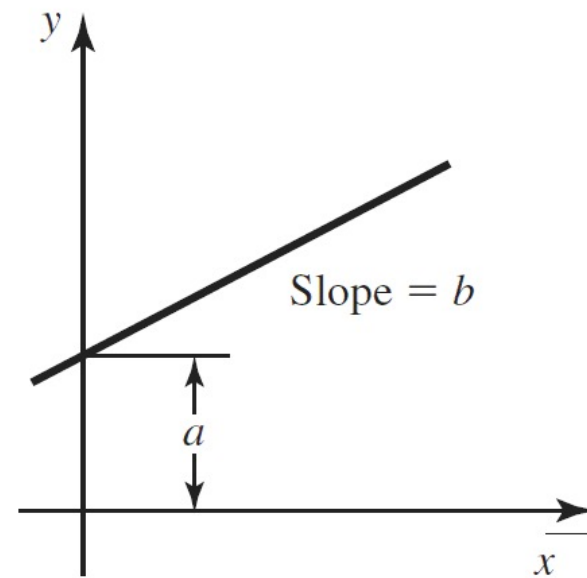
$$y = a + \frac{b}{x}$$

y vs. $\frac{1}{x}$ on linear paper



$$y = a + b\sqrt{x}$$

y vs. \sqrt{x} on linear paper

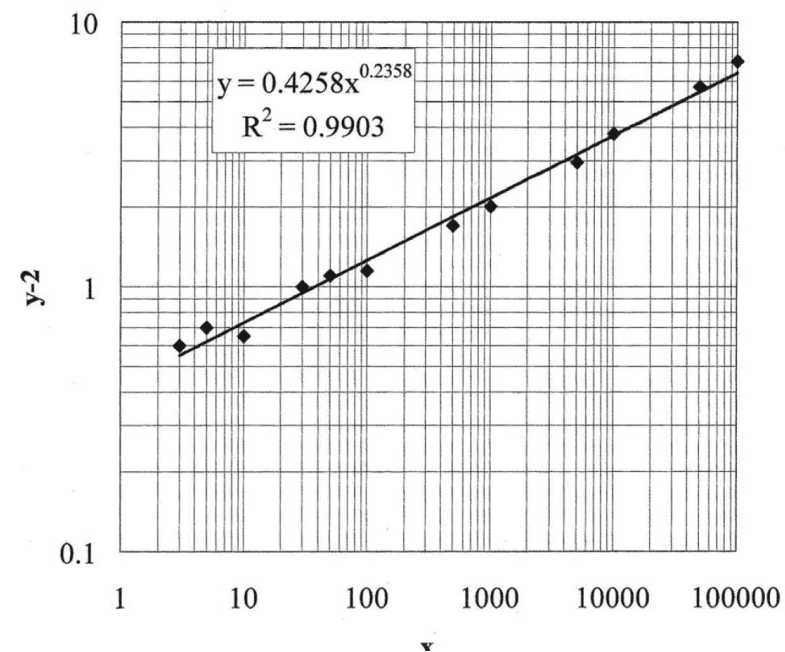
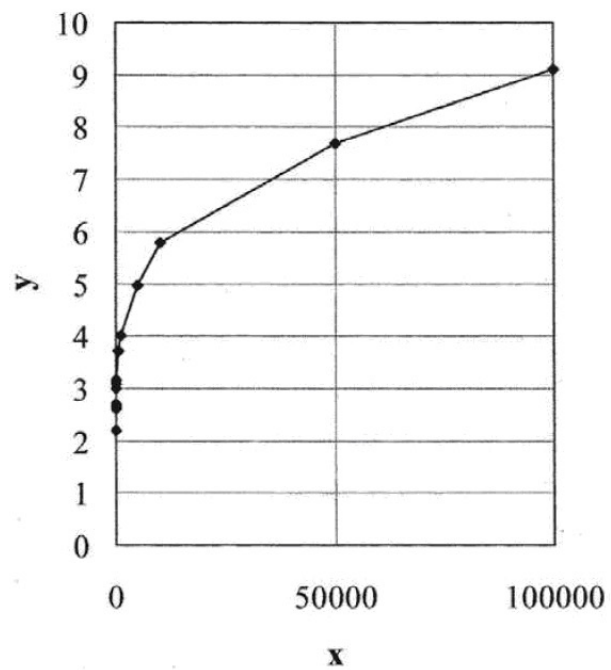


x	y
70700	175
66600	168
51000	138
23000	81
30900	99
36242	109
52331	142
70000	168
84100	191
21810	76
33217	117
44000	144
56700	146
63000	157
87276	197
82200	201
83092	192
93800	208

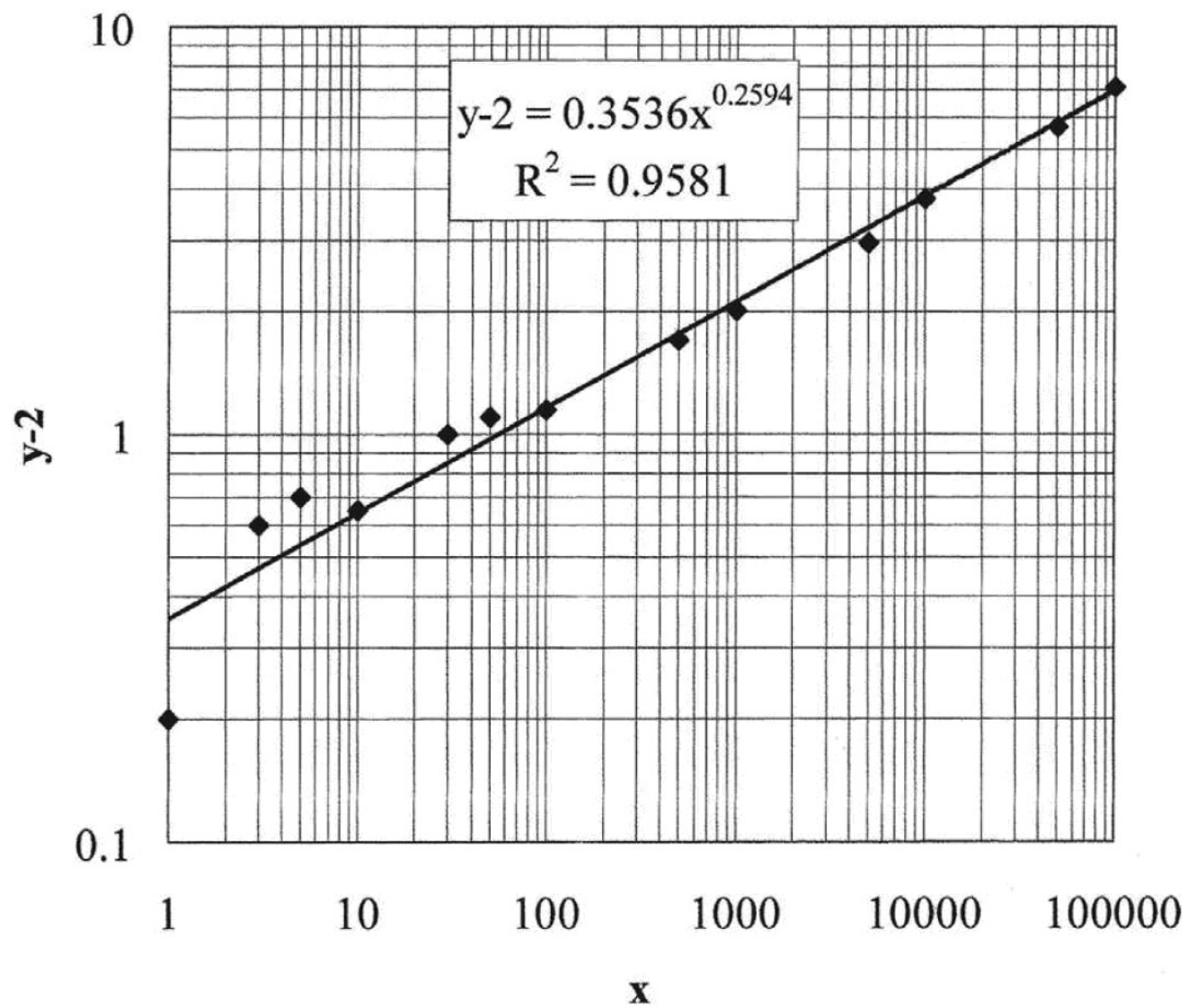
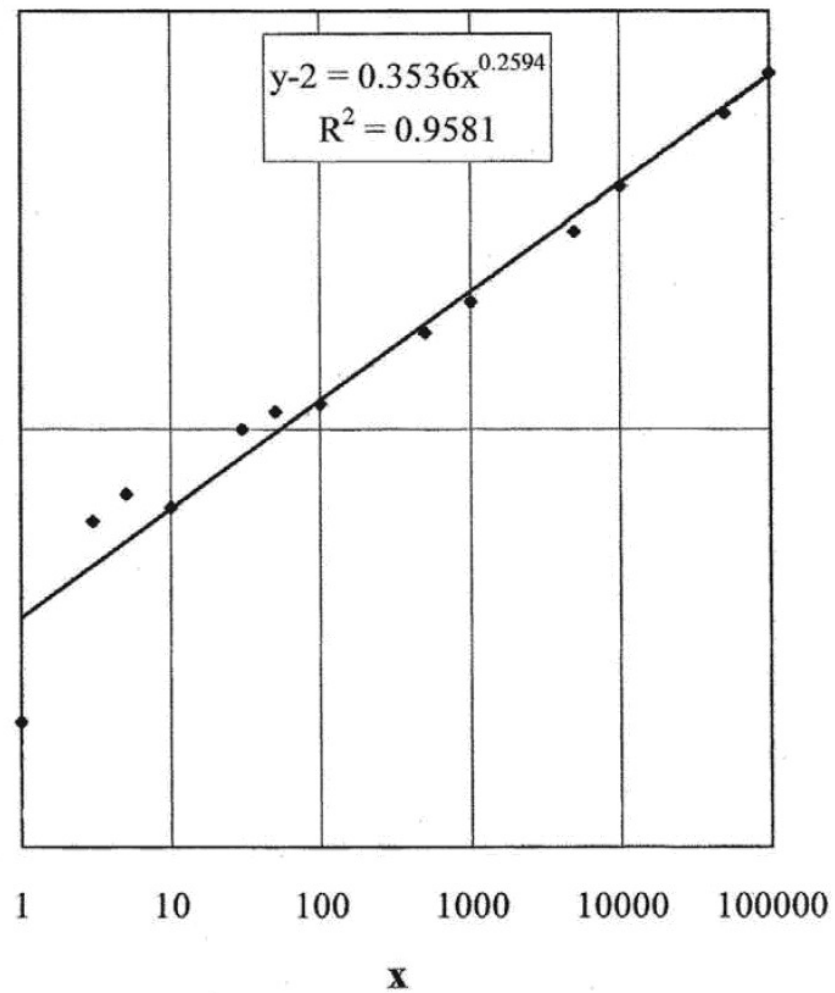
$$y = ax^b$$

$$\log y = \log a + b \log x$$

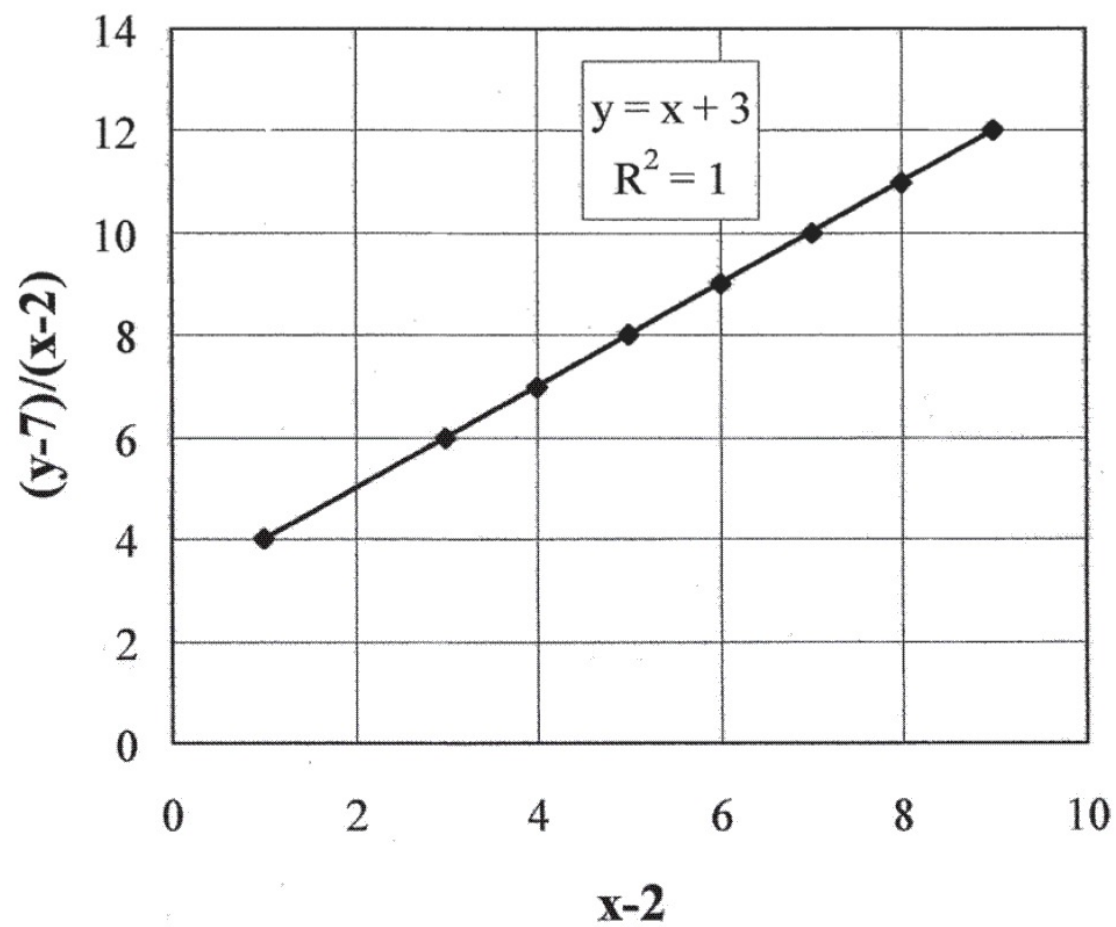
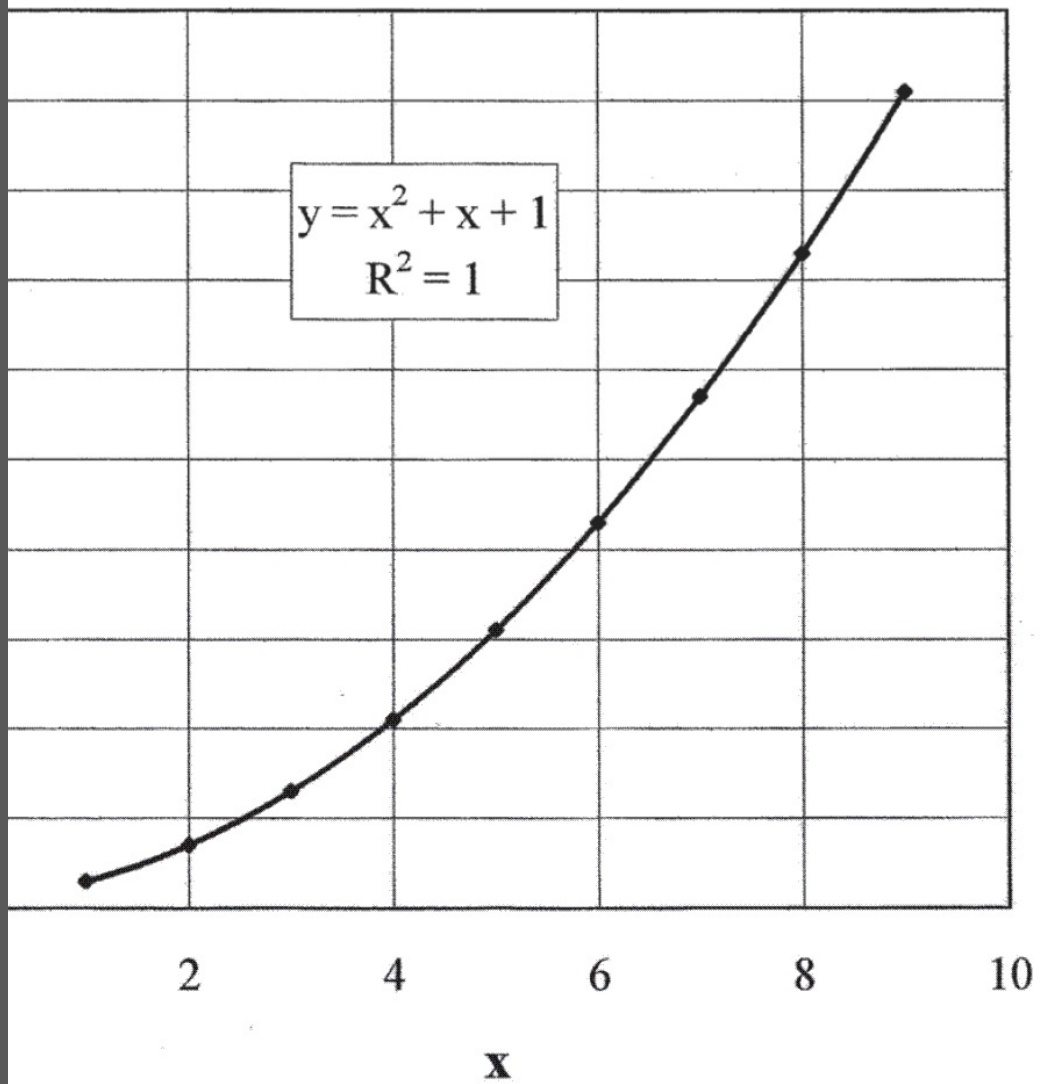
x	y	$y - 2$
1	2.2	0.2
3	2.6	0.6
5	2.7	0.7
10	2.65	0.65
30	3	1
50	3.1	1.1
100	3.15	1.15
500	3.7	1.7
1000	4.01	2.01
5000	4.96	2.96
10000	5.8	3.8
50000	7.7	5.7
100000	9.1	7.1



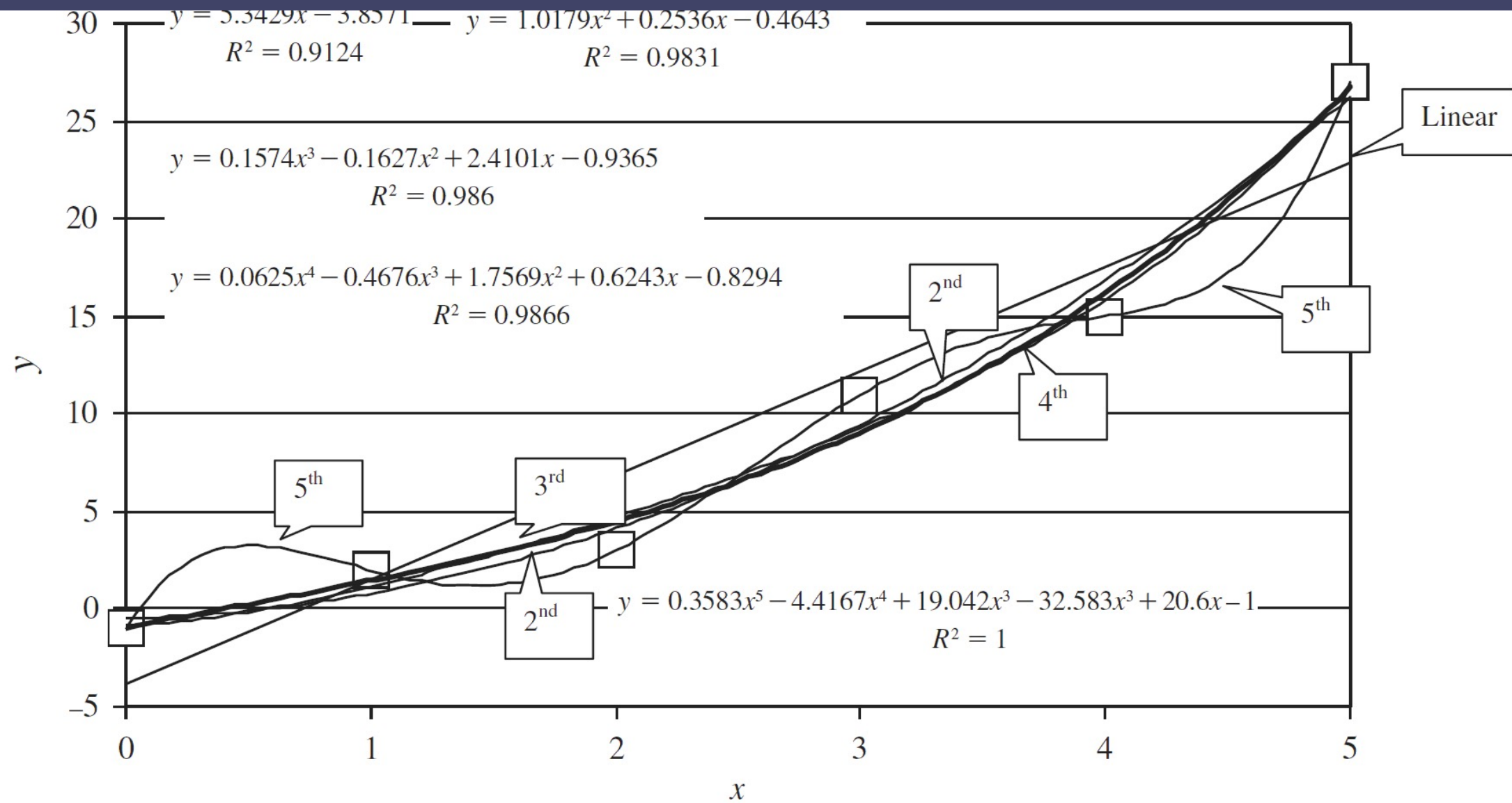
$$y = a + bx^c$$



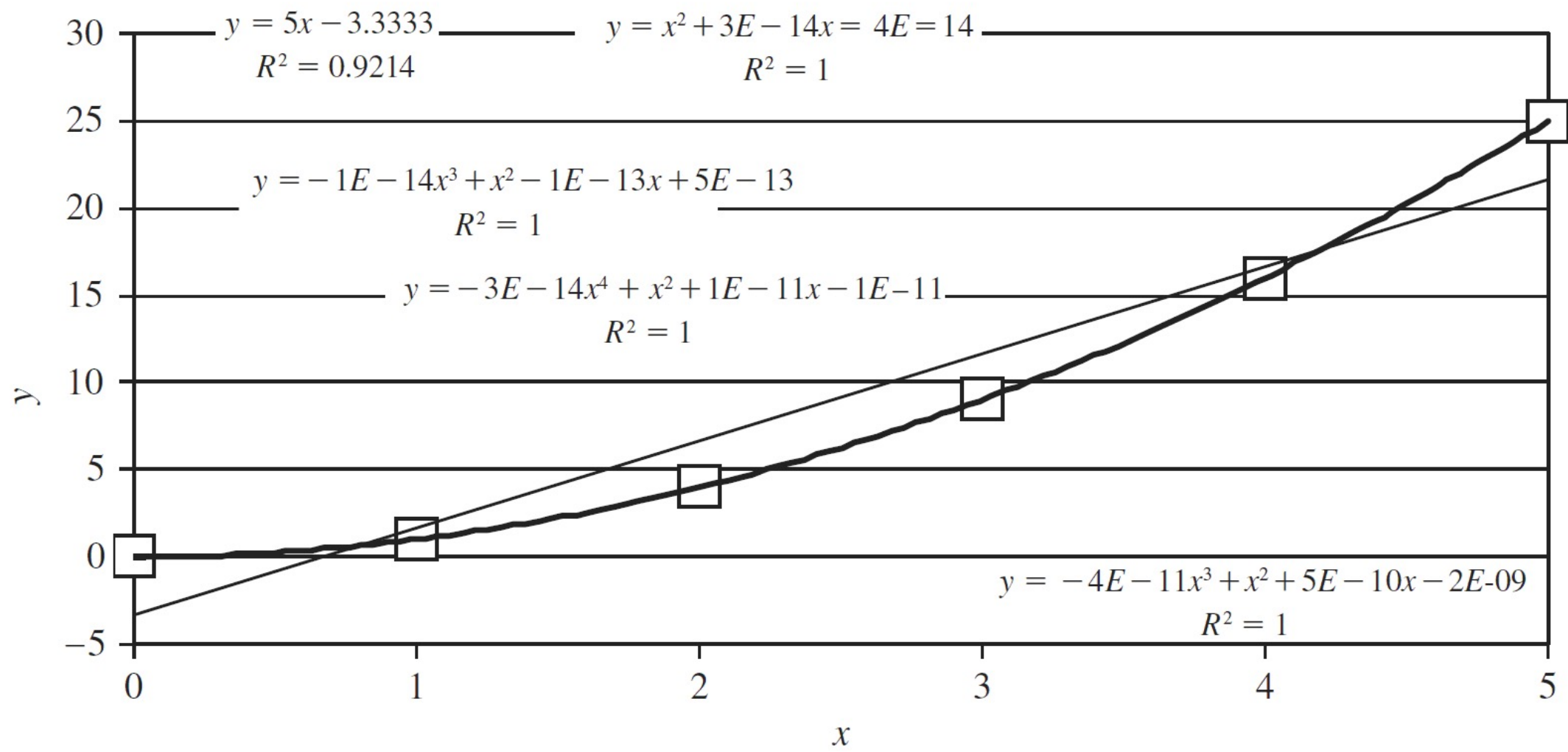
x	y	$x - x_1$	$y - y_1$	$(y - y_1)/(x - x_1)$
1	3	-1	-4	4
2	7	0	0	
3	13	1	6	6
4	21	2	14	7
5	31	3	24	8
6	43	4	36	9
7	57	5	50	10
8	73	6	66	11
9	91	7	84	12



x	y	Linear	Fifth	Fourth	Third	Second
0	−1	−3.8571	−1	−0.8294	−0.9365	−0.4643
1	2	1.4858	2.0006	1.1467	1.4683	0.8072
2	3	6.8287	3.0024	4.706	4.4921	4.1145
3	11	12.1716	11.0012	9.2929	9.0793	9.4576
4	15	17.5145	14.984	15.8518	16.1743	16.8365
5	27	22.8574	26.925	26.8271	26.7215	26.2512
0.5		−1.18565	3.269653	−0.132569	0.24755	−0.083025
1.5		4.15725	1.216297	2.798331	2.8438	2.206375
2.5		9.50015	6.850391	6.847131	6.53125	6.531575
3.5		14.84305	13.78883	12.20823	12.2543	12.89258
4.5		20.18595	17.13773	20.57603	20.95735	21.28938



x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



Ödev-1

[C] 3.6. The following data are taken from a certain heat-transfer test. The expected correlation equation is $y = ax^b$. Plot the data in an appropriate manner and use the method of least squares to obtain the best correlation.

x	2040	2580	2980	3220	3870	1690	2130	2420	2900	3310	1020	1240	1360	1710	2070
y	33.2	32.0	42.7	57.8	126.0	17.4	21.4	27.8	52.1	43.1	18.8	19.2	15.1	12.9	78.5

Ödev-2

[C] 3.29. The following data points are expected to follow a functional variation of $y = ae^{bx}$. Obtain the values of a and b from a graphical analysis:

x	0	0.43	1.25	1.40	2.60	2.9	4.3
y	9.4	7.1	5.35	4.20	2.60	1.95	1.15

Ödev-3

1., 2. ve 3. dereceden yaklaşım yapılırsa nasıl olur.

3.91. The cooling performance of a certain air-conditioning unit, Q , is related to the outdoor temperature T_0 and the indoor temperature T_i through the values in the accompanying table:

$Q(\text{kBtu/h})$	$T_i(^{\circ}\text{F})$	$T_0(^{\circ}\text{F})$
54.3	72	85
51.8	72	95
49.4	72	105
46.6	72	115
50.4	67	85
48	67	95
45.5	67	105
42.9	67	115
46.5	62	85
44.4	62	95
42.2	62	105
40	62	115
45.7	57	85
43.9	57	95
42	57	105
40	47	115

x	y
20000	60
25000	79
35000	90
45000	135
47000	110
50000	130
62000	160
65000	150
70000	180
75000	190
80000	191
90000	200
100000	210
105000	250
110000	240
120000	280
135000	300
140000	290
145000	330
150000	340